Komplexe Zahlen

Teil 2

Darstellung der komplexen Zahlen

- **als Vektoren**
- **mit Polarkoordinaten**
- **trigonometrisch**
- **oder exponentiell**

Eulersche Funktion $E(\varphi)$

Datei Nr. 50012

Stand 5. November 2023

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

https://mathe-cd.de

Inhalt von 50011

Inhalt dieses Textes

Hinweis: Ich war leider nicht konsequent in der Schreibweise: So stehen $\sin(\varphi)$ und $\sin\varphi$ in den Texten, was ja auch in der Literatur nicht einheitlich verwendet wird.

6 Vektoren in der Gaußschen Zahlenebene

6.1 Ortsvektoren (Zeiger) für komplexe Zahlen

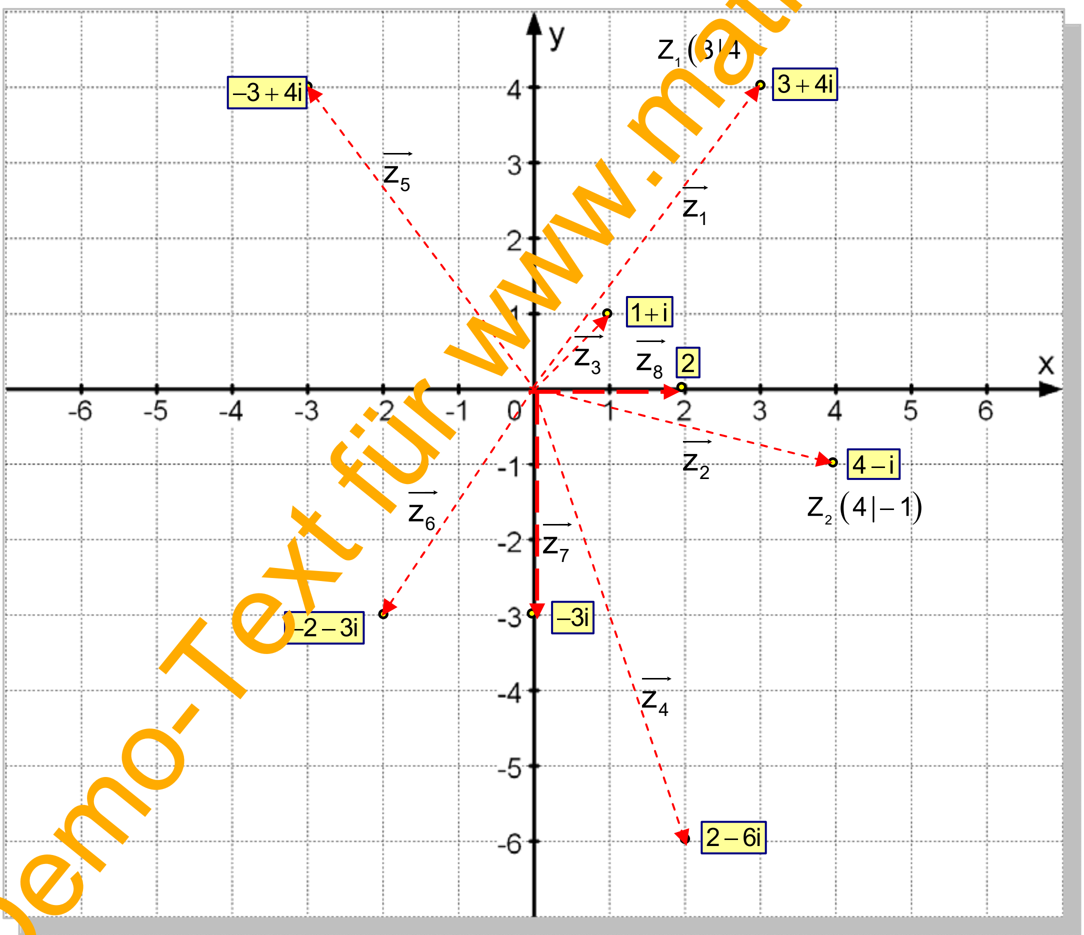
Zu jeder komplexen Zahl z = a + bi gehört ein Punkt mit den Koordinaten $P(a\,|\,b)$ und ein Pfeil, der im Ursprung beginnt und in P endet. Man heißt ihn Ortsvektor des Punktes P und schreibt:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Ein Ortsvektor ***beginnt im Ursprung*** und geht in x-Richtung bis zur Zahl a und in y-Richtung bis zur Zahl b.

Beispiel: Zur Zahl $z_1 = 3 + 4i$ gehört der Punkt $Z_1(3|4)$. Er hat den Ortsvektor $\vec{z_1} = \overrightarrow{OZ_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$,

Zur Zahl $z_2 = 4 - i$ gehört der Punkt $Z_2(4|-1)$. Er hat den Ortsvektor $\vec{z_2} = \overrightarrow{OZ_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$



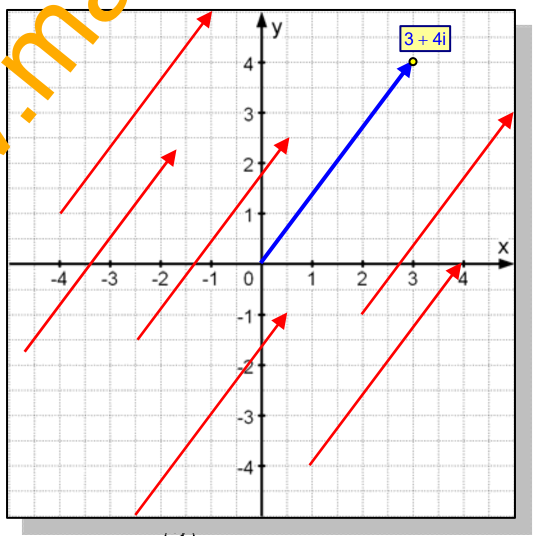
Die Abbildung zeigt die sogenannte „Gaußsche Zahlenebene", in der 8 komplexe Zahlen einerseits durch Punkte und andererseits durch ihre Ortsvektoren dargestellt sind, die man oft auch "Zeiger" heißt.
Zu Z_1 und Z_2 stehen oben die Koordinaten der Ortsvektoren.

Aufgabe: Wie lauten die Ortsvektoren der anderen sechs Punkte? Schreibe auf!

Lösung:

Komplexe Zahl		Punkt		Ortsvektor (Zeiger)
Zu $z_3 = 1+i$	gehört	$Z_3(1\|1)$	mit	$\vec{z_3} = \overrightarrow{OZ_3} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$
Zu $z_4 = 2-6i$	gehört	$Z_4(2\|-6)$	mit	$\vec{z_4} = \overrightarrow{OZ_4} = \begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$
Zu $z_5 = -3+4i$	gehört	$Z_5(-3\|4)$	mit	$\vec{z_5} = \overrightarrow{OZ_5} = \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$
Zu $z_6 = -2-3i$	gehört	$Z_6(-2\|-3)$	mit	$\vec{z_6} = \overrightarrow{OZ_6} = \begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$
Zu $z_7 = -3i$	gehört	$Z_7(0\|-3)$	mit	$\vec{z_7} = \overrightarrow{OZ_7} = \begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$
Zu $z_8 = 2$	gehört	$Z_8(2\|0)$	mit	$\vec{z_8} = \overrightarrow{OZ_8} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

Information: Ortsvektoren sind keine Vektoren



Vektoren sind jedoch keine Pfeile. Unter einem Vektor versteht man die Menge aller (unendlich vielen) Pfeile mit gleicher Richtung und Länge. Das ist sinnvoll, weil es sich gezeigt hat, dass man dies in der Mathematik super anwenden kann.

Rechts erkennt man sieben Pfeile, die alle zum gleichen Vektor gehören. Darunter ist auch der Ortsvektor (Zeiger) der Zahl z = 3 + 4i.

Es muss klar sein: Ein <u>Ortsvektor</u> ist nur ein einziger Pfeil, und zwar derjenige, der im Ursprung beginnt.

Der Name „Ortsvektor" ist historisch bedingt, stellt aber keinen Vektor, sondern nur einen ortsgebundenen Pfeil dar.

Der rechts durch sieben Pfeile dargestellte **Vektor** wird algebraisch durch $\vec{z} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ beschrieben:

Das heißt, dass alle seine Pfeile um die Strecke $\Delta x = 3$ nach rechts und um $\Delta y = 4$ nach oben zeigen.

Ausblick:

Wir lernen jetzt, wie man Vektoren addieren und subtrahieren kann, und dass dies genau der Addition und Subtraktion von komplexen Zahlen entspricht.

6.2 Vektorielle Addition von komplexen Zahlen.

Beispiel 1: Wir addieren $z_1 = 2 + 5i$ und $z_2 = 3 - 2i$.

Die folgenden Abbildungen stellen z_1 und z_2 durch ihre Zeiger dar.

In Abb. 1 wurde außerdem ein zweiter Pfeil des Vektors $\vec{z}_2$ an den Zeiger von $\vec{z}_1$ angehängt. Das stellt die Addition der Vektoren $\vec{z}_1$ und $\vec{z}_2$ dar. Der neue Pfeil $\overrightarrow{OZ_3}$ ist ein Pfeil des Summenvektors $\vec{z}_1 + \vec{z}_2$, den ich mit $\vec{z}_3$ bezeichnet habe.

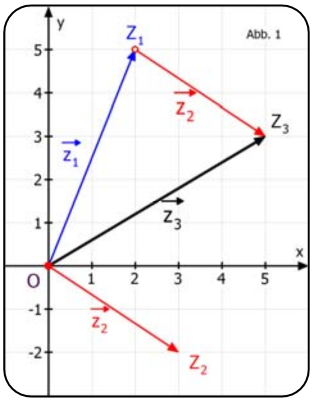
Er ist der Zeiger der Summe $z_3 = z_1 + z_2 = 5 + 3i$

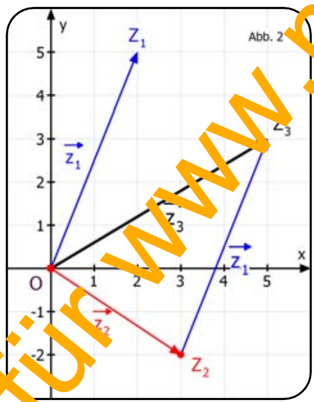
Diese Vektorsumme schreibt man auch so auf: $\vec{z}_1 + \vec{z}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

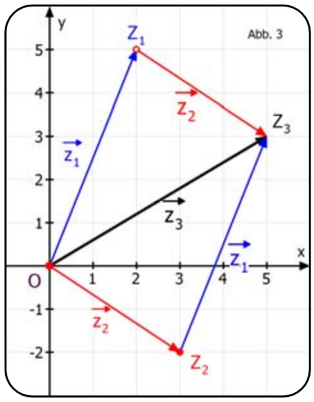
Das entspricht genau der Darstellung von z_3.

In Abb. 2 wurde die Addition vertauscht: Die vektorielle Addition $\vec{z}_2 + \vec{z}_1$ wurde so durchgeführt, dass an den Zeiger von z_2 ein Pfeil des Vektors $\vec{z}_1$ angehängt worden ist. Der Pfeil $\overrightarrow{OZ_3}$ ist derselbe wie in Abb. 1. Also wurde hier $\vec{z}_3 = \vec{z}_2 + \vec{z}_1$ konstruiert: $\vec{z}_2 + \vec{z}_1 = \vec{z}_1 + \vec{z}_2$.

In Abb. 3 wurde aus den Zeigern von z_1 und z_2 ein **Parallelogramm** $OZ_1Z_3Z_2$ gebildet. Die Hauptdiagonale $\overrightarrow{OZ_3}$ stellt dann den Summenvektor, also den Zeiger von $z_1 + z_2$ dar.







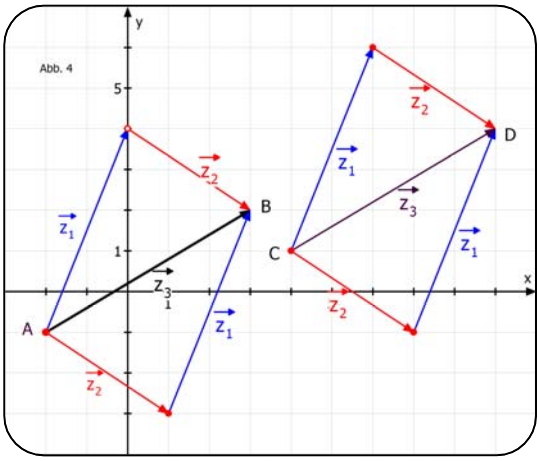
Hinweis:

Weil Vektoren Mengen aus „gleichartigen“ Pfeilen sind, kann man eine Vektoraddition von jedem anderen Anfangspunkt aus durchführen.

In Abb. 4 wird dieselbe Addition einmal vom Punkt $A(-2\,|\,-1)$ aus durchgeführt.

Das Ergebnis ist der Pfeil $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{z}_3$.

Und dann noch eine Vektoraddition vom Punkt $C(4\,|\,1)$ aus. Ergebnis: $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{z}_3$.



Die Schreibweisen $\overrightarrow{AB} = \vec{z}_3$ und $\overrightarrow{CD} = \vec{z}_3$ bedeuten nicht $\overrightarrow{AB}$ ist der Vektor $\vec{z}_3$ bzw. $\overrightarrow{CD}$ ist der Vektor $\vec{z}_3$. Sondern: $\overrightarrow{AB}$ ist ein Pfeil des Vektors $\vec{z}_3$ bzw. $\overrightarrow{CD}$ ist ein Pfeil des Vektor $\vec{z}_3$

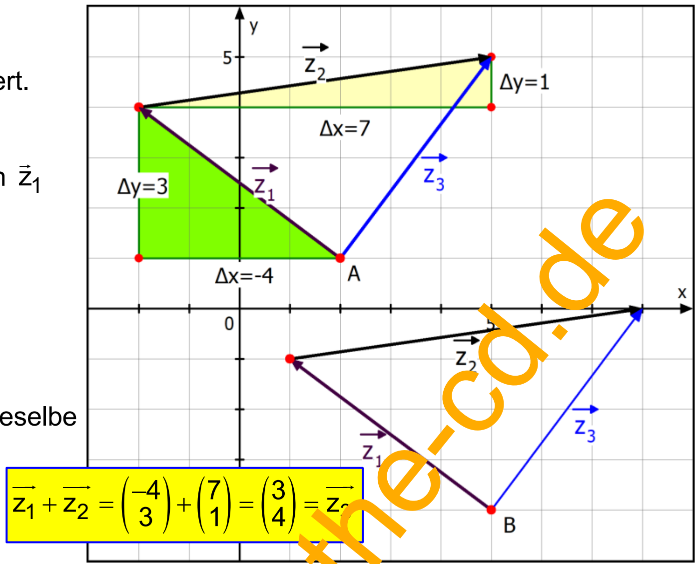
Das Ergebnis $\vec{z}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ wird so berechnet $\vec{z}_1 + \vec{z}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ und kann auch abgelesen werden:

Die Pfeile von $\vec{z}_3$ gehen vom Startpunkt aus um 5 nach rechts und um 3 nach oben.

Beispiel 2:

Vektorielle Addition der Zahlen $z_1 = -4 + 3i$ und $z_2 = 7 + i$

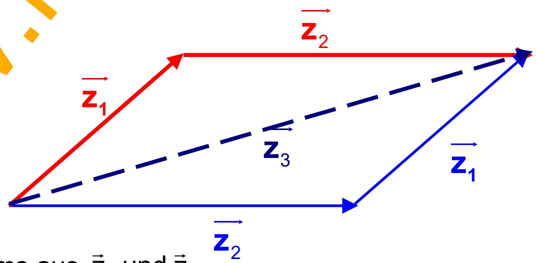
Auch hier wurde diese Vektoraddition von zwei verschiedenen Ausgangspunkten aus konstruiert.
Der Summenpfeil wurde hier dadurch gebildet, dass man einen Pfeil von $\vec{z}_2$ an einen Pfeil von $\vec{z}_1$ angehängt hat.
Der Pfeil des Summenvektors geht dann vom Starpunkt von $\vec{z}_1$ zum Endpunkt von $\vec{z}_2$.
Das Ergebnis, also die beiden Pfeile von z_3, (ausgehend von A bzw. von B) haben beide dieselbe Richtung, nämlich $\Delta x = -4,\ \Delta y = 3$



Man erkennt also nochmals, dass diese Vektoraddition davon <u>unabhängig</u> ist, wo sie konstruiert wird.
Das Ergebnis stimmt <u>immer</u> mit der Addition der komplexen Zahlen überein.

Abschließend nochmals das Ergebnis:

Die Vektoraddition kann auf drei Arten durchgeführt werden.



Die Verkettung der beiden roten Pfeile ergibt: $\vec{z}_1 + \vec{z}_2 = \vec{z}_3$
Die Verkettung der beiden blauen Pfeile ergibt $\vec{z}_2 + \vec{z}_1 = \vec{z}_3$.
Schließlich liegt $\vec{z}_3$ auf der Hauptdiagonalen des Parallelogramms aus $\vec{z}_1$ und $\vec{z}_2$.

Aufgabe: 1

Konstruieren die vektorielle Addition der komplexen Zahlen

a) $z_1 = -4 - 2i$ und $z_2 = 3 - i$

b) $z_1 = 7 + 3i$ und $z_2 = 3 - 3i$

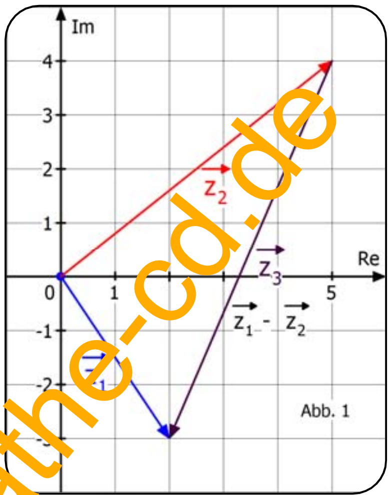
c) $z_1 = 2 + 4i$ und $z_2 = -3 + i$

durch eine Parallelogrammfigur.

6.3 Vektorielle Subtraktion von komplexen Zahlen.

Beispiel 1 Gegeben sind $z_1 = 2 - 3i$ und $z_2 = 5 + 4i$.

Berechne $z_1 - z_2$ und $z_2 - z_1$ und konstruiere das Ergebnis vektoriell.



Konstruktion:

Abb. 1:

Für $\vec{z}_1 - \vec{z}_2$ verbindet man die Spitzen der beiden Zeiger:
Die Spitze des Differenzpfeils muss nach $\vec{z}_1$ zeigen

Man kann die Probe machen, indem man aus der Abbildung eine Addition „herausliest": $\vec{z}_2 + \vec{z}_3 = \vec{z}_1$

Denn die Pfeile von z_2 und z_3 hangen aneinander, wie es bei der Addition notwendig ist, und das Ergebnis ist dann $\vec{z}_1$

Also folgt daraus: $\vec{z}_3 = \vec{z}_1 - \vec{z}_2$

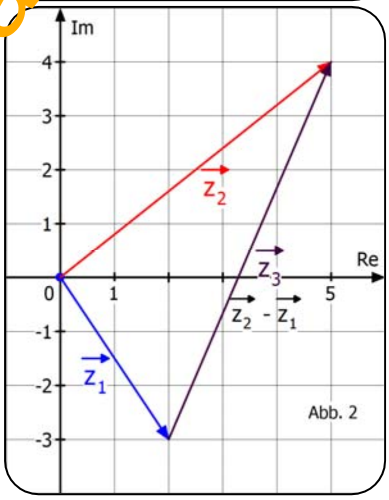


Abb. 2:

Für $\vec{z}_2 - \vec{z}_1$ verbindet man auch die Spitzen der beiden Zeiger:
Die Spitze des Differenzpfeils muss jetzt nach $\vec{z}_2$ zeigen

Man kann die Probe machen, indem man aus der Abbildung eine Addition „herausliest": $\vec{z}_1 + \vec{z}_3 = \vec{z}_2$

Denn die Pfeile von z_1 und z_3 hängen aneinander, wie es bei der Addition notwendig ist, und das Ergebnis ist dann $\vec{z}_2$

Also folgt daraus: $\vec{z}_3 = \vec{z}_2 - \vec{z}_1$

Rechnerische Überprüfung:

Abb. 1: $z_1 - z_2 = (2-3i) - (5+4i) = (2-5) + (-3-4)i = -3 - 7i$

und $\vec{z}_1 - \vec{z}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$

Abb. 2: $z_2 - z_1 = (5+4i) - (2-3i) = (5-2) + (4+3)i = 3 + 7i$

und $\vec{z}_2 - \vec{z}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

Merke: Der Differenzpfeil verbindet die Spitzen der beiden Pfeile und zeigt zum erstgenannten Pfeil.

Aufgabe: 2

Konstruiere die vektorielle Subtraktion der komplexen Zahlen

a) $\vec{z}_1 - \vec{z}_2$ mit $z_1 = -4 - 2i$ und $z_2 = 3 - i$

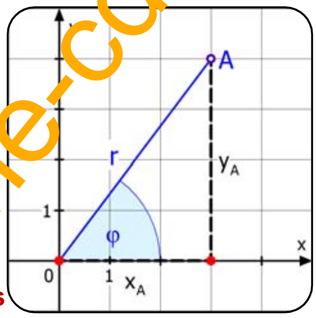
b) $\vec{z}_2 - \vec{z}_1$ mit $z_1 = 7 + 3i$ und $z_2 = 3 - 3i$

7 Polarkoordinaten

Zur Festlegung von Punkten in einer Ebene benötigt man zwei kennzeichnende Größen, die man **Koordinaten** nennt. Neben den **kartesische Koordinaten**, bekannter unter den Namen x-Koordinate und y-Koordinate, gibt es die Polarkoordinaten,

Als Polarkoordinaten verwendet man als erstes den Abstand des „Zahlen-Punktes“ vom Ursprung, den man auch den **Betrag** der komplexen Zahl nennt, und den Winkel φ zwischen der positiven x-Achse und der Strecke OA, den man auch das **Argument** der komplexen Zahl nennt.

Hinweis zum Verständnis der folgenden Bezeichnungen:
Mit OA bezeichne ich die Strecke von O nach A,
$\overline{OA}$ ist dagegen die Länge der Strecke OA, also eine Zahl.
Für die **Winkelmessung** verwendet man sowohl die **Einheit Grad**
wie auch im sogenannten **Bogenmaß die Einheit rad (Radiant).**



Das Bogenmaß eines Winkels ist seine Bogenlänge wenn man den Radius

Daher gehört zu 360^O	das Bogenmaß 2π (rad)	
Zu 180^O	π	
zu 90^O	$\frac{1}{2}\pi$	usw.

Das Bogenmaß verwendet man bei trigonometrischen Funktionen und Kurven.

Beispiele zur Berechnung von Polarkoordinaten:

a) Der Punkt $A(3|4)$ stellt in der Gauß-Ebene die komplexe Zahl $z = 3 + 4i$ dar.

(1) A hat vom Ursprung den Abstand $r = \boxed{\overline{OA} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

(2) Für den Winkel φ (=Phi) zwischen der x-Achse und der Strecke OA gilt: $\boxed{\tan\varphi = \frac{y}{x}} = \frac{4}{3}$.

Um diese Gleichung nach φ umstellen zu können benötigt man die Umkehrfunktion der Tangensfunktion. Sie heißt **Arcustangens**. Auf Taschenrechnern steht dafür $\tan^{-1}$.

Man erhält $\boxed{\tan\varphi = \frac{y}{x}} = \frac{4}{3}$.

Im Gradmaß folgt daraus: $\varphi = \arctan\frac{4}{3} \approx 53{,}13^O$

Im Bogenmaß erhält man $\varphi = \arctan\frac{4}{3} \approx 0{,}927$

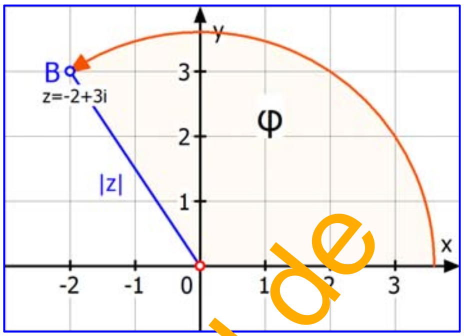
$\tan^{-1} \frac{4}{3}$	
	53.130
$\tan^{-1} \frac{4}{3}$	
	0.9272

Durch diese beiden Angaben r und φ ist der Punkt A eindeutig festgelegt.

Manche schreiben dies so: $A\left[5\,;53{,}13^O\right]$ bzw. $A[5\,;0{,}9272]$.

Das heißt: A liegt auf einem Kreisbogen um O mit Radius 5,
und der Drehwinkel von der x-Achse bis A beträgt $53{,}13^O$.

b) Die komplexe Zahl $z = -2 + 3i$ kann man als Punkt $B(-2\,|\,3)$ im 2. Feld der Gaußschen Zahlenebene darstellen. Berechnung der Polarkoordinaten:



Betrag von z: $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

Argument von z: $\varphi = \arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{3}{-2} = \arctan\left(-\frac{2}{3}\right) \overset{TR}{\approx} -33{,}7^\circ$

$\varphi = 180^\circ - 33{,}7^\circ = 146{,}3^\circ$

usw.